Géométrie dans l'espace : Partie 2

S. GIBAUD

Octobre-Novembre 2017 : Durée Totale Prévue 3 semaines

1 Position relatives de droites et de plans

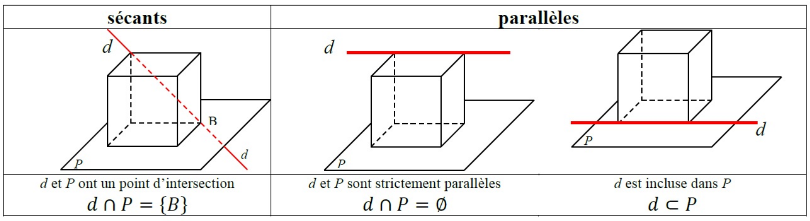

FIGURE 1 – Une Droite et un plan

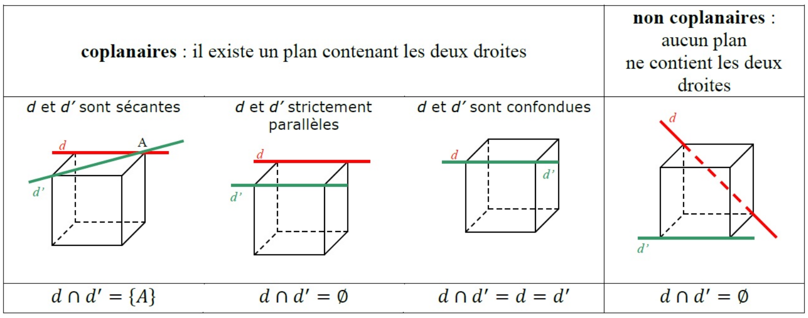

FIGURE 2 – Deux Droites

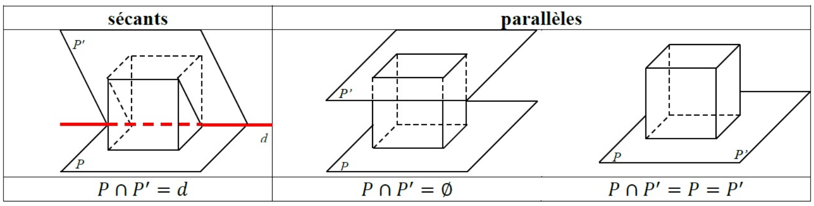

FIGURE 3 – Deux Plans

2 Vecteurs dans l'espace

Les vecteurs dans l'espace c'est comme des vecteurs dans un plan avec juste une coordonnée en plus.

— Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

— Trois points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Définition 2.1. Trois vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ssi on peut exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres *i.e.* il existe α, β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

2.1 Définition vectorielle d'une droite et d'un plan

Définition 2.2 (Droite)**.** Soient A, B deux points distincts. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, *i.e.* il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB).

Définition de la droite d

La droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Remarque. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels qu'il existe $t \in [0, 1]$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

Définition 2.3 (Plan)**.** Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires, *i.e.* il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Définition du plan P

Le plan P passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2.2 Repérage dans l'espace

Définition 2.4. — Trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{kk}$ forment une **base** de $\mathbb{R}^3$ s'ils ne sont pas coplanaires, *i.e.* il n'existe pas de réels α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

— L'espace est muni d'un **repère** $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$(*i.e.* sont non coplanaires). Alors, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

L'abscisse s, l'ordonnée y et la cote z de M sont les coordonnées de M. On note $M(x, y, z)$.

— Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. On note $\overrightarrow{u}(x, y, z)$.

Théorème 2.5. *Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$, et deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.*

— *Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées* $(\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

— *Avec $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées* $(\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots)$.

— *Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :* $\Big(\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\Big)$.

— *Si le repère est orthonormé : avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ on a*

$$AB =$$

$$\|\overrightarrow{u}\| =$$

Exercice. Soit $A(2, 0, 1)$, $B(1, -2, 1)$, $C(5, 5, 0)$ et $D(-3, -5, 6)$.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2.3 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan

Remarque. Soit d la droite passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (x_{\overrightarrow{u}}, y_{\overrightarrow{u}}, z_{\overrightarrow{u}})$. Alors un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite d ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = tx_{\overrightarrow{u}} \\ y - y_A = ty_{\overrightarrow{u}} \\ z - z_A = tz_{\overrightarrow{u}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + tx_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + ty_{\overrightarrow{u}} \\ z = z_A + tz_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

La définition suivante est TRES TRES TRES IMPORTANTE

Définition 2.6 (Équation paramétrique d'une droite)**.** Un système d'équations paramétriques de la droite d passant pas le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est :

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}} \\ z = z_A + t z_{\overrightarrow{u}} \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Remarque. Une droite admet une infinité de représentation d'équations paramétriques.

Exemple. Soient deux points $A(3,4,7)$ et $B(3,5,1)$. Donnez le système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2.3.1 Methode 1 : Trouver une Représentation Paramétrique

Il suffit de connaître un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite. Pour la droite (AB), le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ conviendra. Pour une droite d' parallèle à d, tout vecteur directeur de d conviendra.

Exemple. Dans un cube $ABCDEFGH$, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (BH), puis de la droite Δ parallèle à (BH) passant par G.

2.3.2 Méthode 2 : Trouver des points et un vecteur directeur.

Pour trouver un point d'une droite dont un système d'équations paramétriques est connu, il suffit de choisir une valeur du paramètre ($t = 0$ ou 1) et de calculer x, y, z.
Les coefficients du paramètre t dans le système sont les coordonnées d'un vecteur directeur.

Exemple. Trouver deux points et un vecteur directeur de la droite

$$d : \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.3.3 Méthode 3 : Déterminer si un point appartient à une droite

Il suffit d'injecter les coordonnées x, y, z du point dans le système, puis de résoudre un système de trois équations à une inconnue t.

Exemple. Les points $A(7; 0; -2)$ et $B(-3; 5; -6)$ appartiennent-ils à la droite

$$d' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.3.4 Méthode 4 : Déterminer la position relative de deux droites

— Si les droites ont des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont soit parallèles, soient confondues.

— Sinon, elles sont sécantes, soit non coplanaires. Pour déterminer l'intersection (un point si sécantes, vides si non coplanaires), il suffit de résoudre un système de trois équations à deux inconnues t et t', les paramètres dans les deux systèmes d'équations paramétriques.

Exemple. Position relative des droites d' (exemple précédent) et (MN), avec $M(1, -4, 0)$ et $N(2, -1, -2)$?

2.4 Équation cartésienne d'un plan (et d'une droite)

Remarque. Système d'équations paramétriques d'un plan. Soit P le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors un point $M(x;y;z)$ appartient au plan P ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha x_{\overrightarrow{u}} + \beta x_{\overrightarrow{v}} \\ y = y_A + \alpha y_{\overrightarrow{u}} + \beta y_{\overrightarrow{v}} \\ z = z_A + \alpha z_{\overrightarrow{u}} + \beta z_{\overrightarrow{v}} \end{cases}$$

Théorème 2.7. — *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ non tous nuls. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation :*

$$ax + by + cz + d = 0$$

forment un plan P.

— *Réciproquement, si A, B, C sont trois points non alignés, alors il existe des réels a, b, c et d tel que le plan $P = (ABC)$ soit l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

2.4.1 Méthode 5 : Trouver une équation cartésienne d'un plan (ABC)

Un point $M \in (ABC)$ ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. On en déduit un système de trois équations à 2 inconnues α, β. À l'aide de deux de ces équations, on exprime α, β en fonction de x, y, z. Puis on injecte ces expressions dans la dernière équation.

Exemple. Soient $A(1;0;0)$; $B(1;1;2)$; $C(0;-1;1)$. Trouver l'équation cartésienne de (ABC).

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow (x-1;y;z) = \alpha(0;1;2) + \beta(-1;1;1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha - (x-1) \\ z = 2\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = 2(y - (x-1)) - (x-1) \\ &\Leftrightarrow 3x - 2y + z - 3 = 0 \end{aligned}$$

2.4.2 Méthode 6 : Déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan P

On injecte les expressions de x, y, z en fonction de t, données par la représentation paramétrique de la droite d, dans l'équation du plan P. Puis on résout une équation à une inconnue t, et on en déduit les valeurs de x, y, z si elles existent. Si il n'y a pas de solution : $d//P$. Si il y a une seule solution, l'intersection est un seul point. Si il y a une infinité de solution alors $d \subset P$.

Exemple. Déterminer l'intersection du plan $P : 3x - 2y + z - 3 = 0$ et de la droite (EF), avec $E(0; 1; 0)$ et $F(0; 2; 1)$.

2.5 Méthode 7 : Déterminer l'intersection de deux plans (en paramétrique)

On résout le système des deux équations cartésiennes à 3 inconnues en choisissant une coordonnée comme paramètre (x= t par exemple) de la représentation paramétrique de la droite d'intersection. Pour déterminer l'intersection de 3 plans, on utilise la méthode 7 sur les plans P_1 et P_2, puis la méthode 6 sur la droite $d = P_1 \cap P_2$ et le plan P_3.

Exemple. Determiner l'intersection de $P_1 : x + y + z - 1 = 0$, $P_2 : 2x - y + z - 9 = 0$ et $P_3 = (x0z)$.

3 Produit scalaire dans l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

3.1 Notion de produit scalaire

Définition 3.1.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

$$\|\overrightarrow{u}\| = x^2 + y^2 + z^3$$

Propriété (Importante)**.**

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition 3.2. Un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan P est un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs du plan P.

Remarque. Il suffit que $\overrightarrow{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P. Si $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont des vecteurs directeurs de P, il suffira donc de montrer que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u}_1 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0$

Exemple. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n} = (10; 2; -7)$ est orthogonal au plan (ABC).

Théorème 3.3.
- *Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, avec a, b, c non tous nuls. Alors le vecteur $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$ est un vecteur normal au plan P.*
- *Réciproquement, si le plan P passe par le point A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$, alors un point $M = (x; y; z)$ appartient au plan P ssi*

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

3.2.1 Méthode 8 : Trouver une équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal

Si le plan P a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$, il admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et on détermine d en remplaçant x, y, z par les coordonnées d'un point du plan.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne du Plan (ABC) (exemple précédent).