Fonctions Exponentielles et Logarithme

S. GIBAUD

Janvier 2018
Durée : 10 jours

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition de la fonction exponentielle

Explication. Parfois des phénomènes physiques ou économiques peuvent s'emballer. Un exemple, "l'argent attire l'argent". Un modèle de création d'opportunités économiques est le suivant : Plus une personne est riche, plus on lui propose des bon plans pour se faire de l'argent et ainsi de suite.

On note $W(t)$ la richesse d'un individu au temps t. Le modèle est :

$$W'(t) = W(t)$$

On appelle ce genre d'équation : une équation différentielle. On répondre à ce genre de question on crée une fonction exp telle que :

$$W(t) = \exp(t)$$

1.1.1 Existence et Unicité

Théorème 1.1. *Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée* ***exponentielle*** *et est notée $x \mapsto \exp(x)$.*

Preuve exigible au Bac. L'existence de exp est admise.

Pour montrer l'unicité il y a une seule idée à retenir : On prend une fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ et on montre que $f = \exp$.

Obj : Montrer que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{\exp(x)}$ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

On a

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{(\exp x)^2}$$

(on a $\exp(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Or $f' = f$ Donc

$$g'(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus $g(0) = 1$ Finalement on a :

$$1 = g(0) = g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$$

Donc $f(x) = \exp(x)$. $\square$

Remarque. On a bien entendu :

$$\exp'(x) = \exp(x) \qquad \exp(0) = 1$$

De plus

$$\exp(x) > 0 \qquad \exp \text{est croissante}$$

Exercice. On appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch } (x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh } (x) = \frac{\exp(x) - \exp(x)}{2}$$

Dériver ch (x) et sh (x). Que remarquez vous par rapport aux dérivées de cos et sin.

1.1.2 Propriétés algébriques

Théorème 1.2 (Super Important!!!!). *Pour tout réel x, y on a :*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Proposition 1.3. *Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n$$

Notations. Pour plus de rapidité d'écriture (c'est dire à quel point cette fonction est importante) et pour plus de cohérence avec les 10^n on note :

$$\exp(x) = e^x$$

Remarque. $e^x = (e)^x$ avec $e \simeq 2,718$.

Proposition 1.4 (Vitale pour le BAC et la suite!!!!!!!).

$$e^0 = 1 \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{xy} = (e^x)^y = (e^y)^x$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n \qquad e^{x/2} = \sqrt{e^x} \qquad e^x > 0$$

Exercice. Sortir 1 feuille blanche et regarder le tableau. Allez plus vite!! Attends pas que je fasse la correction et cherche c'est facile! Voilà tu vois que tu sais faire! C'est très bien.

1.2 Etude de la fonction Exponentielle

Théorème 1.5. *La fonction exponentielle est dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *(*$\exp('x) = \exp(x) > 0$ *pour tout réel* x*)..*

Graphe de la fonction

Proposition 1.6.
- $e^0 = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- *La courbe exponentielle est au dessus de toutes ses tangentes.*

Exercice (Exercice : Utile pour les preuves donc pour la prépa).

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe exponentielle en 0.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

3. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Exercice Type BAC. Dresser le tableau de variation complet de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{e^x+1} \end{array}$$

Proposition 1.7. *La fonction exponentielle est une fonction continue strictement croissante donc bijective. Autrement dit (avec une formule)*

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad et \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Exercice. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x+3} = 1$
2. $e^{x+3} = 0$
3. $e^{x+3} > \sqrt{e}$
4. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

1.3 Croissances comparées

Théorème 1.8 (Théorème de Croissances Comparées)**.** *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

On retiendra que "En l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes". En particulier

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \ldots, \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = \ldots$$

Exercice. Calculer les limites suivantes :

1. Prenez votre date de naissance, par exemple 18/02/2018 enlever les slash vous obtenez un nombre $n = 18022018$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} e^x - x^n$ avec n le nombre obtenu avec votre date d'anniversaire.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - x} = \dots$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \dots$

1.4 Fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Rappel. Pour une fonction u,

$$(e^u)' = u'e^u$$

Faire le tableau de variation et tracer les fonctions :

1. $f(x) = e^{17x}$
2. $f(x) = xe^{-38x}$
3. $f(x) = e^{-29x^2}$

2 La fonction Logarithme

Remarque. La blague suivante est interdite : "Exponentielle et Logarithme sont dans un restaurant qui paye l'addition ? Exponentielle car Logarithme Népérien (Ne paie rien) ....."

2.1 Définitions de la fonction Logarithme Népérien

Théorème 2.1.
— *Pour tout* $y > 0$*, l'unique solution de l'équation* $e^x = y$ *est appelée le* ***logarithme népérien*** *de* y*, et est notée* $\ln(y)$ *ou* $\ln y$*.*
— *La fonction* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est la fonction réciproque de l'exponentielle. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}_+^*$ *:*

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \qquad e^{\ln y} = y \qquad \ln(e^x) = x$$

2.2 Propriétés algébriques

Théorème 2.2. *Pour tout réels positifs* $x, y > 0$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

C'est à dire : "Le logarithme transforme un produit en somme".

Proposition 2.3 (Tu ne les connais pas, tu ne passes pas)**.** *Pour tout réels* $x, y > 0$ *et tout entier* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln(e) = 1 \qquad \ln(\frac{1}{y}) = \ln() - \ln(y)$$

$$\ln(\frac{x}{y}) = \dots \qquad \ln(x^n) = n\ln(x) \qquad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

2.3 Etude de la fonction Logarithme Népérien

Proposition 2.4. *La fonction logarithme népérien est continue strictement croissante. On a donc pour tout réel positifs* $x, y > 0$ *:*

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

Théorème 2.5 (Très très Important)**.** *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$*. Pour tout réel* $x > 0$ *:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

Proposition 2.6 (Très utile)**.**

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Remarque. Le graphe de la fonction logarithme est le suivant.

2.4 Croissances Comparées

Théorème 2.7 (Théorème de Croissances Comparées)**.** *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^n}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^n = 0$$

On retiendra que "En l'infini et en 0, le logarithme est dominé par les fonctions polynômes".

Proposition 2.8.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \ldots, \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \ldots$$

Exercice. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$

3. $\lim_{x \to 0^+} (x + \ln(x))$

4. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln(x)}$

2.5 Fonctions Composées : $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème 2.9. *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et :*

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exercice. Dresser le tableau de variation complet des fonctions $g : x \mapsto \ln(1 - x^2)$ et $h : x \mapsto \ln(\frac{x-2}{x-1})$.