Dérivation et Tableau de variation
Ce qu'il faut savoir

S. Gibaud

Septembre 2018

1 Dérivation

1.1 Compréhension

La fonction dérivée d'une fonction f est un outil permettant de connaître les variations de f (savoir quand f est croissante ou décroissante). Elle est aussi associé à une notion de vitesse (en physique). En physique elle est notée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

1.2 Utilisation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert D_f. Soit f' sa dérivée. Soit I un intervalle

- Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.

1.3 Dérivée des fonctions usuelles

Dans cette sous section, nous introduirons les dérivées des fonctions exp et ln centrales dans le cours de terminale. Je vous demande pour le moment de juste connaître leur dérivées et de pouvoir calculer des dérivées avec les exponentielles exp et les logarithmes ln.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c & f'(x) &= 0\\
f(x) &= x & f'(x) &= 1\\
f(x) &= x^2 & f'(x) &= 2x\\
f(x) &= x^3 & f'(x) &= 3x^2\\
f(x) &= x^n \ (\forall n \in \mathbb{N}) & f'(x) &= nx^{n-1}\\
f(x) &= \sqrt{x} \ (x \neq 0) & f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
f(x) &= \exp(x) & f'(x) &= \exp(x)\\
f(x) &= \ln(x) \ (x > 0) & f'(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

1.4 Dérivation de fonctions plus complexes

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

$$\begin{aligned}
(u+v)' &= u' + v' \\
(u \cdot v)' &= u'v + v'u \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
(\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(u^n)' &= nu' \cdot u^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple de dérivation de multiplications de polynômes

$$\begin{aligned}
\Big(x(x^2+1)\Big)' &= 1 \cdot (x^2+1) + x \cdot (2x+0) = 3x^2 + 1 \\
\Big(x^2(2x+3)\Big)' &= 2x \cdot (2x+3) + x^2(2 \cdot 1 + 0) = 6x^2 + 6x
\end{aligned}$$

Toujours des multiplications (ou divisions) mais avec des fonctions plus complexes

$$\begin{aligned}
(x \cos x)' &= \cos x - x \sin x \\
\Big((x^2+2x)\sin x\Big)' &= (2x+2)\sin x + (x^2+2x)\cos x \\
\left(\frac{\cos x}{x^2+3}\right)' &= \frac{(\sin x) \cdot (x^2+3) - 2x \cdot \cos x}{(x^2+3)^2} \\
\left(\frac{\ln x}{3x+2}\right)' &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (3x+2) - 3\ln x}{(3x+2)^2} \\
x^2 \cdot \exp x &= 2x \cdot \exp x + x^2 \exp x
\end{aligned}$$

Maintenant des racines et des puissances

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\cos x})' &= \quad \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \\
\left(\sin^5 x\right)' &= \quad 5(-\cos x)\sin^4 x \\
\left(\sqrt{\exp x} \cdot (3x^2+1)\right)' &= \quad (\sqrt{\exp x})' \cdot (3x^2+1) + \sqrt{\exp x} \cdot (6x) \\
&= \quad \frac{\exp x}{2\sqrt{\exp x}} \cdot (3x^2+1) + \sqrt{\exp x} \cdot (6x)
\end{aligned}$$

2 Tableau de variation

2.1 Compréhension

On vous donne une fonction avec une formule compliquée comment vous faîtes pour la tracer si vous n'avez pas de calculatrice ou de logiciel qui vous permette de tracer des fonctions. Ben vous faîtes un tableau de variations pour savoir quand la fonction est croissante et décroissante. Comment savoir quand la fonction est croissante ou décroissante ? On calcule la dérivée puis on cherche le signe de cette dérivée. Est ce qu'avec ça on peut tracer la fonction a peu près ? La réponse est NON ! Il reste à savoir entre quoi est contenue la fonction. Pour ça on calcule les valeurs de la fonction aux bords de l'ensemble de définition ainsi que là où la dérivée s'annule (point d'intérêt = extremum ou point d'inflexion).

2.2 Méthode

Tracer le tableau de variation de f.

1. Calculer la dérivée de f notée f' (Si vous ne savez pas faire regarder la section 1)
2. Chercher le signe de f'. Pour cela plusieurs méthodes
   — Si c'est un trinôme, calculer un discriminant et appliquer votre cours.
   — Factoriser f' en produit de termes plus simples dont vous pouvez connaître le signe.
   — Chercher les endroits où f' s'annule. Cela vous donne des intervalles où f' ne s'annule pas. Ensuite (dans le cas où f' est continue[1]) pour connaître le signe de la dérivée dans ces intervalles il suffit de trouver le signe d'une valeur de cet intervalle.

2.3 Exemple avec temps de réalisation

Bien entendu il existe d'autre méthodes, certaines sont plus performantes que d'autres. La performance d'une technique dépends essentiellement du problème et du gout de celui qui la réalise.

Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4/3\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{3x+4}$$

1) Calcul de la dérivée (1 min)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (3x+4) - 3(x^2+7)}{(3x^2+4)^2} = \frac{3x^2+8x-21}{(3x+4)^2}$$

1. Ce qui est toujours le cas en terminale, en physique, en mécanique, etc...

2) Recherche des points où f' s'annule (4 min si l'on ne réussit pas les calculs du premier coup)

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\leftrightarrow \frac{3x^2 + 8x - 21}{(3x+4)^2} = 0 && (1) \\
&\leftrightarrow 3x^2 + 8x - 21 = 0 && (2)
\end{aligned}
$$

C'est un trinôme du second degré calculons le discriminant $\Delta = 64 - (-21) \cdot 8 \cdot 3 = 316 = 2 \cdot 2 \cdot 79$ Donc les endroits où f' s'annulent sont

$$x_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{79}}{6} = \frac{-4 - \sqrt{79}}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{79}}{3}$$

3) Recherche du signe de la dérivée et conclusion (3 min sans calculatrice)

Comme $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ ($\sqrt{79} > \sqrt{25} = 5$), on a $0 \in [x_1, x_2]$ et $f'(0) = -21 < 0$. Comme f' est continue on a f' est négative sur $[x_1, x_2]$. Comme le numérateur est un trinôme du second degré, $3x^2 + 8x - 21$ est positif sur $]-\infty, x_1]$, négatif sur $[x_1, x_2]$ et positif sur $[x_2, +\infty]$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{x_1^2+7}{3x_1+4}$	$\searrow$	$\frac{x_2^2+7}{3x_2+4}$	$\nearrow$	